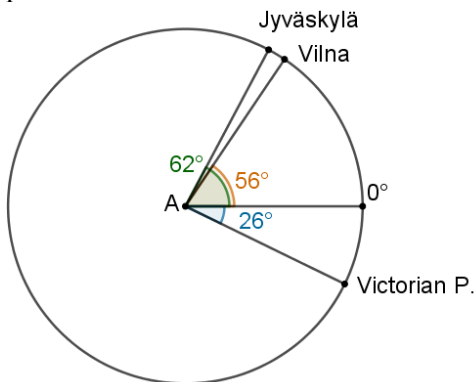


15.1

- a) Jyväskylä ja Vilna sijaitsevat samalla pituuspiirillä. Niiden välinen lyhin etäisyys maan pintaa pitkin mitattuna on isoympeyrälle kuuluvan kaaren pituus b .



Lasketaan Jyväskylän ja Vilnan välisen kaaren keskuskulma.

$$\alpha = 62^\circ - 56^\circ = 6^\circ$$

Lasketaan kaaren pituus b .

$$b = \frac{6^\circ}{360^\circ} \cdot 40\,000 \approx 670 \text{ (km)}$$

- b) Lasketaan Vilnan ja Victorian putousten välisen kaaren keskuskulma.

$$\beta = 56^\circ + 26^\circ = 82^\circ$$

Lasketaan kaaren pituus.

$$b = \frac{82^\circ}{360^\circ} \cdot 40\,000 \approx 9100 \text{ (km)}$$

Vastaus

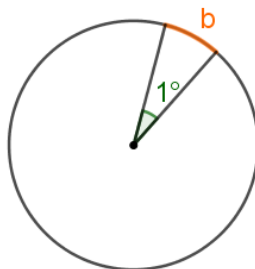
a) 670 km

b) 9100 km

15.2

- a) Keskuskulma ja kaaren pituus ovat suoraan verrannolliset.

keskuskulma	kaaren pituus (km)
1°	b
360°	40 000



Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan kaaren pituus b .

$$\frac{1^\circ}{360^\circ} = \frac{b}{40000}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$b \approx 111 \text{ (km)}$$

- b) Lasketaan paikkakuntien välinen kulma, kerrotaan kulman suuruus yhtä astetta vastaavalla kaaren pituudella b ja taulukoidaan tiedot.

Paikkakunta	Leveyspiiri	Leveyspiirien erotus	Matka (km)
Helsinki	60° N	0°	0
Kairo	30° N	$60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$	$30 \cdot 111 \approx 3330$
Lusaka	15° E	$60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$	$75 \cdot 111 \approx 8330$
etelänapa	90° E	$60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$	$150 \cdot 111 \approx 16700$
Cooksaaret	20° E	$150^\circ + 70^\circ = 220^\circ$	$220 \cdot 111 \approx 24400$
Honolulu	20° N	$220^\circ + 40^\circ = 260^\circ$	$260 \cdot 111 \approx 28900$
pohjoisnapa	90° N	$260^\circ + 70^\circ = 330^\circ$	$330 \cdot 111 \approx 36600$
Helsinki	60° N	0	40 000

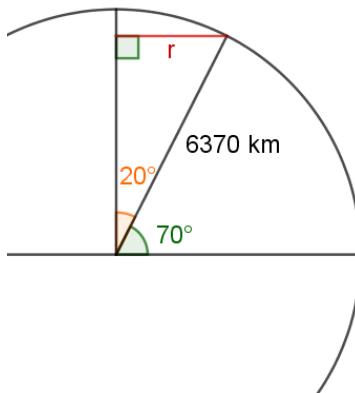
Vastaus

- a) 111 km

15.3

Ratkaistaan leveyspiirin säde r suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin 20^\circ = \frac{r}{6370}$$
$$r \approx 2178,67 \text{ (km)}$$



Lasketaan leveyspiirin 70° N pituus.

$$p \approx 2\pi \cdot 2178,67$$
$$\approx 13700 \text{ (km)}$$
$$p = 2\pi r, \text{ missä } r = 2178,67.$$

Kulkija on kulkenut 13 700 km.

Vastaus

13 700 km

15.4

a) Ratkaistaan pallon säde r .

$$A = 4\pi r^2$$

Sijoitetaan $A = 6,00$.

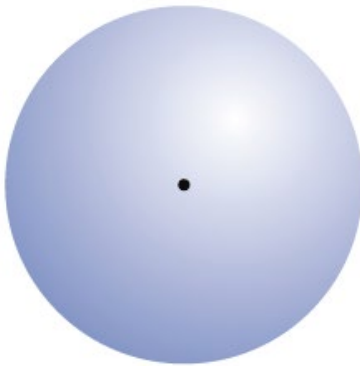
$$6,00 = 4\pi r^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r \approx 0,69099 \text{ tai } r \approx -0,69099$$

Pituus on positiivinen luku, joten $r \approx 0,69099$.

Piirretään pallo, jonka säde on $0,69099$.



b) Lasketaan pallon tilavuus.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Sijoitetaan $r \approx 0,69099$.

$$\approx \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0,69099^3$$

$$\approx 1,38$$

Vastaus

a) pallon säde $0,69099$

b) tilavuus $1,38$

15.5

- a) Pallon säde on $\frac{95 \text{ cm}}{2} = 47,5 \text{ cm}$.

Lasketaan pallon tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 47,5^3 \\ &\approx 450\,000 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Ilmaistaan tilavuus litroina.

$$450\,000 \text{ cm}^3 = 450 \text{ dm}^3 = 450 \text{ L}$$

- b) Lasketaan pallon pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= 4\pi r^2 \\ &= 4 \cdot \pi \cdot 47,5^2 \\ &\approx 28\,000 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Ilmaistaan pinta-ala neliömetreinä.

$$28\,000 \text{ cm}^2 = 280 \text{ dm}^2 \approx 2,8 \text{ m}^2$$

Vastaus

- a) 450 L
b) 2,8 m²

15.6

- a) Halli koostuu suoran ympyrälierion puolikkaasta ja kahdesta neljäsosapallosta, joiden säteen pituus on 10 m. Lasketaan hallin tilavuus.

$$\begin{aligned} V_h &= \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 h + 2 \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 30 + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 \\ &\approx 6800 \text{ (m}^3\text{)} \end{aligned}$$

- b) Lasketaan hallin katon pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot 2 \pi r h + 2 \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} \pi r^2 \\ &= \pi \cdot 10 \cdot 30 + 2 \cdot \pi \cdot 10^2 \\ &\approx 1600 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus

- a) 6800m^3
b) 1600m^2

15.7

a) Lasketaan pallon tilavuus.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5,0^3 \approx 523,5988 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Lasketaan pallon massa.

$$\begin{aligned} m &= \rho V && \text{massa} = \text{tiheys} \cdot \text{tilavuus} \\ &= 19 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 523,5988 \text{ cm}^3 \\ &\approx 9900 \text{ g} \\ &= 9,9 \text{ kg} \end{aligned}$$

b) Muutetaan tilavuuden yksikkö vastaamaan tiheyden yksikköä.

$$523,5988 \text{ cm}^3 = 0,5235988 \text{ dm}^3 = 0,0005235988 \text{ m}^3$$

Lasketaan pallon massa.

$$\begin{aligned} m &= \rho V \\ &= 21 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,0005235988 \text{ m}^3 \\ &\approx 0,011 \text{ kg} \\ &= 11 \text{ g} \end{aligned}$$

Vastaus

a) 9,9 kg

b) 11 g

15.8

Lasketaan kuution tilavuus ja pinta-ala.

$$V = 10,0^3 = 1000 \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$A = 6 \cdot 10,0^2 = 600 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Kuutiosta muovataan pallo, jolla on sama tilavuus.
Ratkaistaan sen pallon säde r .

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$1000 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r \approx 6,2035 \text{ (cm)}$$

Lasketaan pallon pinta-ala.

$$A_p = 4\pi r^2$$

$$= 4 \cdot \pi \cdot 6,2035$$

$$\approx 483,597 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Pallon pinta-ala on pienempi kuin kuution pinta-ala.
Verrataan pinta-alojen erotusta kuution pinta-alaan.

$$\frac{600 - 483,597}{600} \approx 0,194 = 19,4\%$$

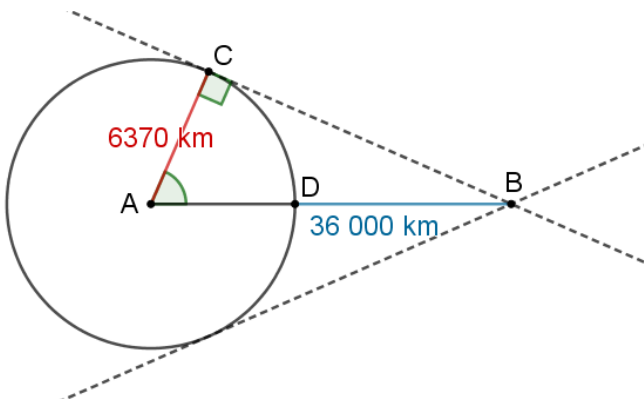
Pinta-ala pienenee 19,4 %.

Vastaus

Pienenee 19,4 %.

15.9

Piirretään kuva.



Ratkaistaan kulman A suuruus.

$$\cos \alpha = \frac{6370}{6370 + 3600}$$

$$\cos \alpha \approx 0,150342$$

$$\alpha \approx \cos^{-1} 0,150342$$

$$\alpha \approx 81^\circ$$

Satelliitin näkyvyysalue ulottuu leveyspiirille 81° N.

Vastaus

leveyspiirille 81° N

15.10

Lasketaan pallon tilavuus.

$$V_p = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi$$

Pakkaus on suora ympyrälieriö, jonka korkeus on 2 ja pohjan säde 1.
Lasketaan pakkauksen tilavuus.

$$V_{pakkaus} = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi$$

Verrataan pallon tilavuutta pakkauksen tilavuuteen.

$$\frac{\frac{4}{3}\pi}{2\pi} = \frac{2}{3} \approx 0,667 = 66,7\%$$

Vastaus

$$\frac{2}{3} \approx 66,7\%$$

15.11

a) Lasketaan Oslon ja Pisan välisen kaaren keskuskulma.

$$\alpha = 60^\circ - 44^\circ = 16^\circ$$

Lasketaan kaaren pituus b .

$$\begin{aligned} b &= \frac{16^\circ}{360^\circ} \cdot 40000 \\ &= 1777,77... \\ &\approx 1800 \text{ (km)} \end{aligned}$$

b) Lasketaan Pisan ja Pointe-Noiren välisen kaaren keskuskulma.

$$\alpha = 44^\circ + 4^\circ = 48^\circ$$

Lasketaan kaaren pituus b .

$$\begin{aligned} b &= \frac{48^\circ}{360^\circ} \cdot 40000 \\ &= 5333,33... \\ &\approx 5300 \text{ (km)} \end{aligned}$$

Vastaus

a) 1800 km

b) 5300 km

15.12

- a) Lasketaan leveyspiirin säde r .

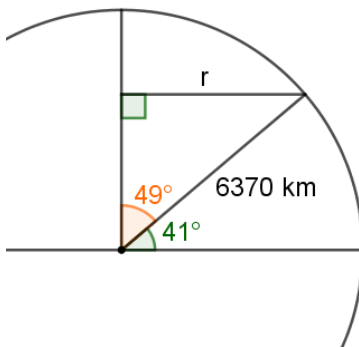
$$\sin 49^\circ = \frac{r}{6370}$$

$$r \approx 4807,5 \text{ (km)}$$

Lasketaan leveyspiirin pituus p .

$$p = 2 \cdot \pi \cdot 4807,5$$

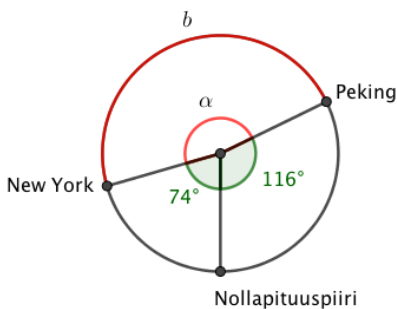
$$\approx 30000 \text{ (km)}$$



- b) Lasketaan Pekingin ja New Yorkin välisen kaaren keskuskulma.

$$\alpha = 360^\circ - (74^\circ + 116^\circ)$$

$$= 170^\circ$$



Lasketaan matka Pekingistä New Yorkiin.

$$b = \frac{170^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 4807,5$$

$$\approx 14000 \text{ (km)}$$

Vastaus

- a) 30 000 km
b) 14 000 km

15.13

- a) Pallon pinta-ala on 123.
Ratkaistaan pallon säde r .

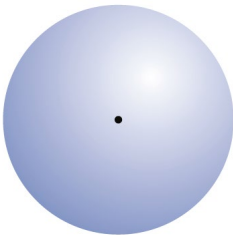
$$A = 4\pi r^2$$

$$123 = 4\pi r^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r \approx 3,1286$$

Piirretään pallo geometriaohjelman 3D-piirtoalueessa.



- b) Lasketaan pallon tilavuus.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\approx \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3,1286^3$$

$$\approx 128$$

Vastaus

- a) pallon säde 3,1286
b) tilavuus 128

15.14

- a) Pallon säde on $\frac{25 \text{ cm}}{2} = 12,5 \text{ cm}$.

Lasketaan pallon tilavuus.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 12,5^3 \approx 8181,23 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Ilmaistaan tilavuus litroina.

$$8181,23 \text{ cm}^3 = 8,18123 \text{ dm}^3 = 8,18123 \text{ L} \approx 8,2 \text{ L}$$

- b) Pallon uusi säde on $\frac{35 \text{ cm}}{2} = 17,5 \text{ cm}$.

Lasketaan pallon uusi tilavuus.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 17,5^3 \approx 22449,30 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Ilmaistaan tilavuus litroina.

$$22449,30 \text{ cm}^3 = 22,44930 \text{ dm}^3 = 22,44930 \text{ L}$$

Lasketaan tilavuuden muutos.

$$22,44930 - 8,18123 = 14,26807 \approx 14 \text{ (L)}$$

Vastaus

a) 8,2 L

b) 14 L

15.15

Jäätelön tilavuus kartion ja puolipallon tilavuuksien summa.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3,0^2 \cdot 12,5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3,0^3 \\ &\approx 174,36 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Ilmaistaan tilavuus desilitroina.

$$174,36 \text{ cm}^3 = 0,17436 \text{ dm}^3 = 0,17436 \text{ L} = 1,7436 \text{ dl} \approx 1,7 \text{ dl}$$

Vastaus

1,7 dl

15.16

Kalvon pinta muodostuu kahdesta puolipallosta ja suoran ympyrälieriön vaipasta. Puolipallojen säde on 3,3 cm. Suoran ympyrälieriön korkeus on 6,6 cm ja pohjan säde 3,3 cm.

Lasketaan kalvon pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 + 2\pi rh \\ &= 4 \cdot \pi \cdot 3,3^2 + 2 \cdot \pi \cdot 3,3 \cdot 6,6 \\ &\approx 270 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus

270 cm²

15.17

Lasketaan pallonmuotoisen kuulan tilavuus.

$$V = \frac{7,257}{7850} \quad \text{tilavuus} = \frac{\text{massa}}{\text{tiheys}}$$
$$\approx 0,00092446 \text{ (m}^3\text{)}$$

Ratkaistaan kuulan säde r .

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$
$$0,00092446 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$r \approx 0,06043 \text{ (m)}$$

Lasketaan kuulan halkaisija.

$$d = 2r \approx 2 \cdot 0,06043 \text{ m} \approx 0,12086 \text{ m} \approx 12,1 \text{ cm}$$

Vastaus

12,1 cm

15.18

a) Länsiraja seuraa pituuspiiriä 109° W.

Länsiraja on isoympyrän kaari, jonka pohjoispää on leveyspiirillä 41° N ja eteläpää leveyspiirillä 37° N.

Länsirajaa vastaavan keskuskulman suuruus on $41^\circ - 37^\circ = 4^\circ$.

Lasketaan länsirajan pituus.

$$b = \frac{4^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6371 \approx 440 \text{ (km)}$$

b) Eteläraja on pitempi kuin pohjoisraja.

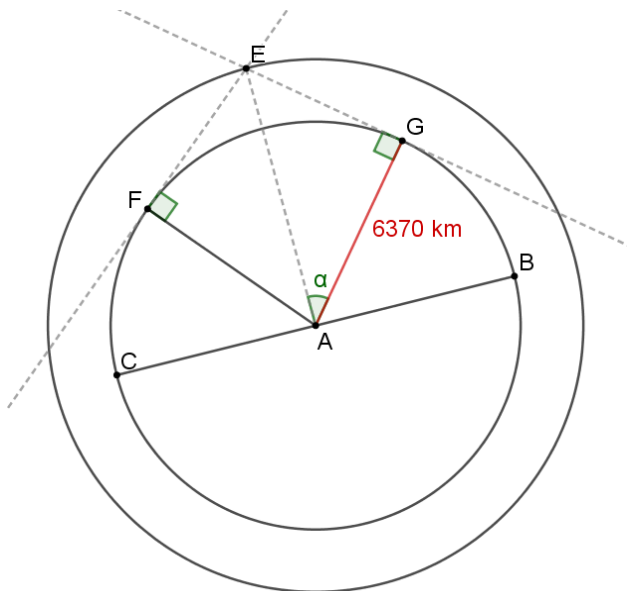
Eteläraja kulkee pitkin leveyspiiriä 37° N ja pohjoisraja leveyspiiriä 41° N. Leveyspiirin 37° N säde on suurempi kuin leveyspiirin 41° N.

Vastaus

a) 440 km

15.19

Piirretään kuva. Satelliitti on pisteessä E . Satelliitin näkyvyysalue ulottuu pisteisiin F ja G .



Ratkaistaan kulman α suuruus.

$$\cos \alpha = \frac{6370}{6370 + 1200}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{6370}{6370 + 1200} \right) \approx 32,70^\circ$$

Kulman BAG suuruus on $90^\circ - 32,70^\circ \approx 57^\circ$.

Näkyvyysalue ulottuu leveyspiirille 57° N.

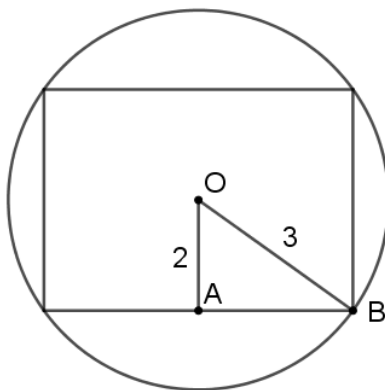
Vastaus

57° N

15.20

Piirretään poikkileikkauskuvio.

Kolmio ABO on suorakulmainen.
Ratkaistaan lieriön pohjan säde
 AB Pythagoraan lauseella.



$$AB^2 + 2^2 = 3^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella

$$AB = \sqrt{5} \text{ tai } AB = -\sqrt{5}$$

tarkat arvot.

Pituus on positiivinen luku, joten $AB = \sqrt{5}$.

Lasketaan lieriön tilavuuden suhde pallon tilavuuteen.

$$\frac{V_l}{V_p} \approx \frac{\pi \cdot (\sqrt{5})^2 \cdot 4}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3} = \frac{5}{9} \approx 0,556 = 55,6\%$$

Vastaus

$$\frac{5}{9} \approx 55,6\%$$